התמרת פוריה דו-מימדית

- השימוש בהתמרת פוריה דו-מימדית חשוב ביותר באופטיקה. ההתמרה של פונקציה דו-מימדית תהיה דו מימדית אף היא. ניתן להרחיב למימד שלישי ועוד.
- במימד אחד (למשל בחשמל) ההתמרה היא בין זמן ותדר זמני - t ו-ω. באופטיקה משתמשים ביחידות (x, y) *ולהתמרה* ביחידות (u, v) או ביחידות (k_x, k_y). האינטגרל יהיה כפול:

$$F\left(k_x;k_y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x,y\right)\mathrm{e}^{-i\left(k_x x+k_y y\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

או

$$F\left(\mathbf{k}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\mathbf{r}\right)\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\mathrm{d}^2\,\mathbf{r}$$

- במספר מקרים ניתן להפריד בין הכיוונים, או לכתוב את הפונקציה כמכפלה של פונקציות של המימדים:

$$F\left(k_x;k_y\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f_x\left(x\right)\mathrm{e}^{-ik_x x}\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty} f_y\left(y\right)\mathrm{e}^{-ik_y y}\,\mathrm{d}y=F_x\left(k_x\right)F_y\left(k_y\right)$$

- ההפרדה בין המימדים קשה יותר כאשר המימדים הם (r, θ) - הרדיוס והאזימוט.

סימטריה בהתמרת פוריה

- תכונות הסימטריה גם הן מתרחבות מהמקרה החד-מימדי בהתאמה:

  פונקציה צנטרו-סימטרית $f(x, y) = f(-x, -y)$ והתמרתה $F(k_x, k_y) = F(-k_x, -k_y)$

  פונקציה אנטי-צנטרו-סימטרית $f(x, y) = -f(-x, -y)$ והתמרתה $F(k_x, k_y) = -F(-k_x, -k_y)$

  פונקציה ממשית $f(x, y) = f^*(x, y)$ והתמרתה $F(k_x, k_y) = F^*(-k_x, -k_y)$

- כיון שכך, הפונקציה $|F(k_x, k_y)|^2$ היא צנטרו-סימטרית.
- פונקציה צנטרו-סימטרית *והתמרתה* אינן משתנות בסיבוב של 180^0, למשל $F(r, \theta) = F(r, \theta - \pi)$.
- ניתן להרחיב ולהראות כי הדבר מתקיים לכל שבר שלם של סיבוב, או $F(r, \theta) = F(r, \theta - 2\pi / n)$.
- אם הפונקציה היא ממשית ולה סימטריה מסדר $n = 2m + 1$, $|F(\mathbf{k})|^2$ מסדר n.
- אבל $|F(\mathbf{k})|^2$ היא גם צנטרו-סימטרית, כלומר הסימטריה היא מסדר $2n$.
- למשל למשולש שווה צלעות התמרה בעלת סימטריה משושה.
- (אנטי) סימטריה שיקופית דומה: $f(x, y) = \pm f(-x, y)$ והתמרתה $F(k_x, k_y) = \pm F(k_x, -k_y)$.
- בשני המקרים לפונקציה $|F(k_x, k_y)|^2$ סימטריה שיקופית.

התמרת פוריה הפוכה

- משפט ההיפוך של התמרת פוריה:

התמרת פוריה של התמרת פוריה היא הפונקציה המקורית בהבדלים קלים.

- אם ניקח פונקציה, נתמיר אותה, ואת ההתמרה נתמיר שוב, נקבל את הפונקציה המקורית.
- תהא הפונקציה המקורית החד-מימדית $f(x)$ והתמרת ההתמרה $f_F(x)$ נחשב אותה ישירות:

$$f_F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-ikx} \, \mathrm{d}x \right\} \mathrm{e}^{-iky} \, \mathrm{d}k$$

או

$$f_F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-ik(x+y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}k$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{\mathrm{e}^{-ik(x+y)}}{-i(x+y)} \right]_{k=-\infty}^{k=\infty} \mathrm{d}x$$

- נציב $z = x + y$ ונכתוב את הפונקציה בסוגרים המרובעים כגבול

$$\left[\frac{\mathrm{e}^{-ik(x+y)}}{-i(x+y)} \right]_{k=-\infty}^{k=\infty} = \lim_{k \to \infty} \frac{2 \sin kz}{z} = 2\pi\delta(z)$$

התמרת הפוכה

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2\sin kz}{z}=2\pi\delta(z)$$

- כאן נעשה שימוש באינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kz}{z}\,\mathrm{d}z=\pi$$

- לאחר הצבה מקבלים

$$f_F(y)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x+y)\,\mathrm{d}x=2\pi f(-y)$$

- קיבלנו את הפונקציה המקורית עד כדי שיקוף בראשית ומקדם של 2π.
- במערכת אופטית אכן מקבלים דמות הפוכה.
- כדי לקבל בדיוק את הפונקציה המקורית, מקובל להגדיר התמרה הפוכה שונה במעט:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k$$

דוגמה להתמרה הפוכה

לקחנו שתי פונקציות δ סימטריות במרחק $b/2$ מהראשית, וקיבלנו שההתמרה שלהן

$$F(k) = 2\cos\frac{kb}{2}$$

נבצע את ההתמרה ההפוכה

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\cos\frac{kb}{2}\exp(ikx)\,\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[ik\left(x+\frac{b}{2}\right)\right]+\exp\left[ik\left(x-\frac{b}{2}\right)\right]\right\}\mathrm{d}k \\ &= \delta\left(x+\frac{b}{2}\right)+\delta\left(x-\frac{b}{2}\right) \end{aligned}$$

קיבלנו את הפונקציה המקורית.

קונבולוציה

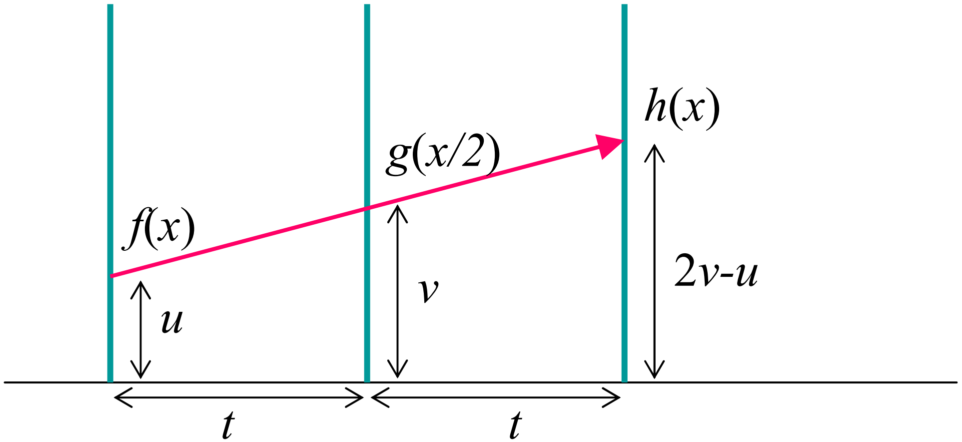
- הקונבולוציה (קיפול) של שתי פונקציות ממשיות חד-מימדיות מוגדר כך:

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u$$

- מסמנים את הקונבולוציה על ידי * או על ידי ⊗.
- באופטיקה בפרט ובפיסיקה בכלל, נעשה שימוש רב בקונבולוציה.
- ההרחבה הדו-מימדית של הקונבולוציה היא

$$h(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)g(x-u,y-v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

הדגמת קונבולוציה



- שלושה מסכים במרחקים שווים.
- עבור נקודות אור קטנות מקבלים

$$f\left(x\right)=\delta\left(x-u\right);\quad g_2\left(x\right)=\delta\left(x-v\right);\quad h\left(x\right)=\delta\left(x+u-2v\right)$$

- בגלל כפל המרחק נצמצם את מימד g_2 פי שתים, ונקרא לפונקציה g . הקורלציה היא

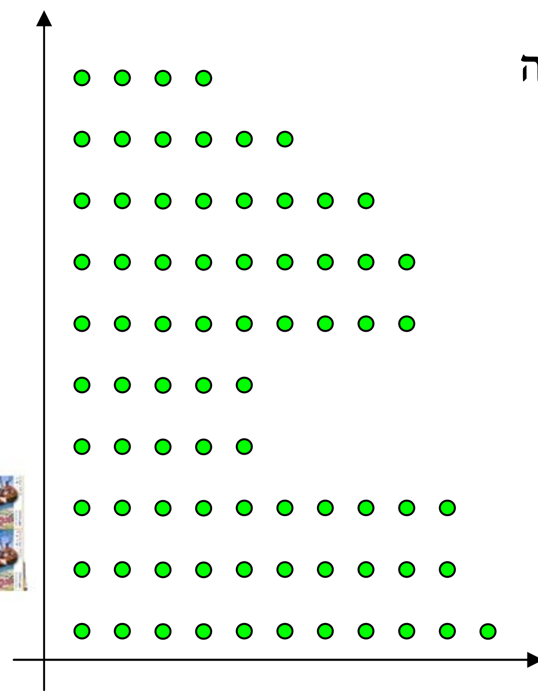
$$f\left(x\right)=\delta\left(x-u\right);\quad g\left(x/2\right)=\delta\left(x/2-v\right);\quad h\left(x\right)=\delta\left(x+u-2v\right)$$

- כל נקודה בדמות הסופית היא סכום של הרבה נקודות במסכים הקודמים:

$$h\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x+u\right)g\left(x/2\right)\mathrm{d}u$$

- היפוך המסכה של g הופך את הקורלציה לקונבולוציה.

קונבולוציה עם פונקציות δ



- בהרבה מקרים, יש צורך לתאר פונקציה החוזרת על עצמה פעמים רבות, בצורה סדירה או אחרת.
- דוגמה פשוטה היא גליון בולי חיפה, שחלקם נתלש. רוחב הבולים הוא 20 מ"מ וגובהם 25 מ"מ. הדיו על הבול מחולק לפי $f(x,y)$.
- הסריג הוא מערך סדיר של פונקציות δ:

$$g(x,y)=\sum_{l,m}\delta(x-20l)\,\delta(y-25m)$$

- גליון הבולים כולו יהיה

$$h(x,y)=\int f(x-u,y-v)\,g(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

דוגמות של קונבולוציה

כאמור, לקונבולוציה שימושים רבים בפיסיקה בכלל ובאופטיקה בפרט. הנה מספר שימושים של הקונבולוציה, שעליהם יורחב הדיבור בהמשך, כאן ובקורסים אחרים:

- סריג עקיפה. סריג העקיפה ניתן לייצוג כחריץ כניסה או פונקציה המתארת קו ספקטראלי, כאשר העוצמה הנמדדת היא קונבולוציה של החריץ או הקו עם מערך חד-מימדי של פונקציות δ.

- בעקיפת פראונהופר ניתן למדוד ישירות רק את העצמה. התמרת פונקצית העוצמה היא הקונבולוציה של מסכת העקיפה עם היפוכה.

- צפיפות האלקטרונים בסריג מיוצגת על ידי קונבולוציה של צפיפות האלקטרונים בתא מולקולארי יחיד עם סריג תלת מימדי של פונקציות δ המייצגות את סריג הגביש.

התמרה של קונבולוציה

- משפט הקונבולציה:

התמרת פוריה של קונבולוציה של שתי פונקציות היא מכפלת התמרות שתי הפונקציות.

- נחשב את ההתמרה של הקונבולוציה

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u$$

- ההתמרה תהיה

$$H(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

- נחליף משתנה $y = x - u$ ונפרק למכפלה

$$H(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(y)\mathrm{e}^{-ik(u+y)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathrm{e}^{-iku}\,\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathrm{e}^{-iky}\,\mathrm{d}y$$

$$=F(k)G(k)$$

חבילת גלים

- **חבילת גלים גאוסית** היא גל מחזורי עם מעטפת גאוסית:

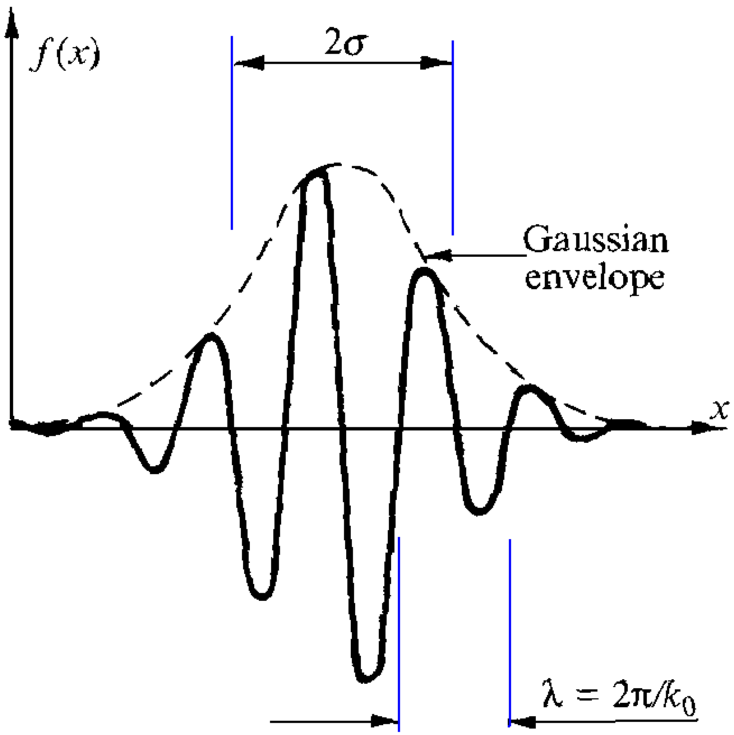
$$f(x) = A\mathrm{e}^{ik_0 x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$$

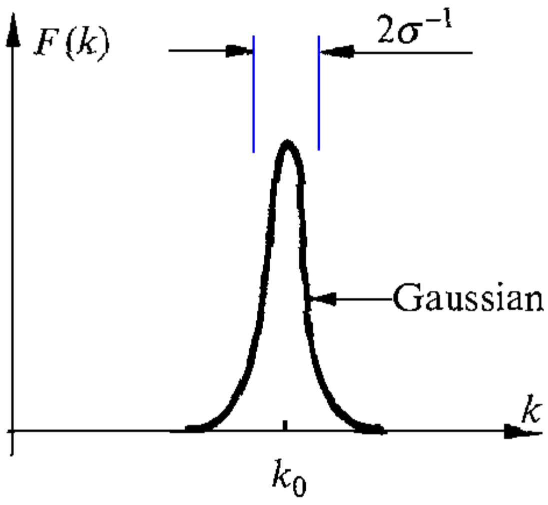
- התמרתו היא הקונבולוציה של התמרות שתי הפונקציות:

$$F(k) = 2\pi A\delta(k-k_0)\otimes\sqrt{2\pi\sigma}\,\mathrm{e}^{-k^2\sigma^2/2}$$

- הקונבולוציה עם פונקצית ה-δ מזיזה את הגאוסיאן בשיעור

$$F(k) = (2\pi)^{3/2}\,\sigma A\,\mathrm{e}^{-(k-k_0)^2\sigma^2/2}$$





קורלציה

- הקורלציה (מתאם) של שתי פונקציות ממשיות חד-מימדיות מוגדר כך:

$$h_C\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(u\right)g^*\left(u+x\right)\mathrm{d}u$$
$$=f\left(-x\right)\otimes g^*\left(x\right)$$

- כלומר, יש קשר פשוט בין קונבולוציה לקורלציה.
- לעתים מחליפים בהגדרה את x ב- $-x$.
- כאשר הדמיון בין הפונקציות גדול, הקורלציה חיובית וגדולה.
- התמרת הקורלציה היא

$$H_C\left(k\right)=F\left(-k\right)G^*\left(-k\right)$$

אוטו-קורלציה

- הקורלציה העצמית של פונקציה, או הקורלציה של פונקציה עם עצמה היא

$$h_{AC}\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(u\right)f^*\left(u+x\right)\mathrm{d}u$$

$$=f\left(-x\right)\otimes f^*\left(x\right)$$

- לקורלציה העצמית של פונקציה יש שיא גדול בראשית.
- התמרת הקורלציה העצמית היא

$$H_{AC}\left(k\right)=F\left(-k\right)F^*\left(-k\right)=\left|F\left(-k\right)\right|^2$$

- אם הפונקציה ממשית, אזי התמרת פוריה שלה מקיימת $F(k) = F^*(-k)$.
- לכן התמרת הקורלציה העצמית שלה היא

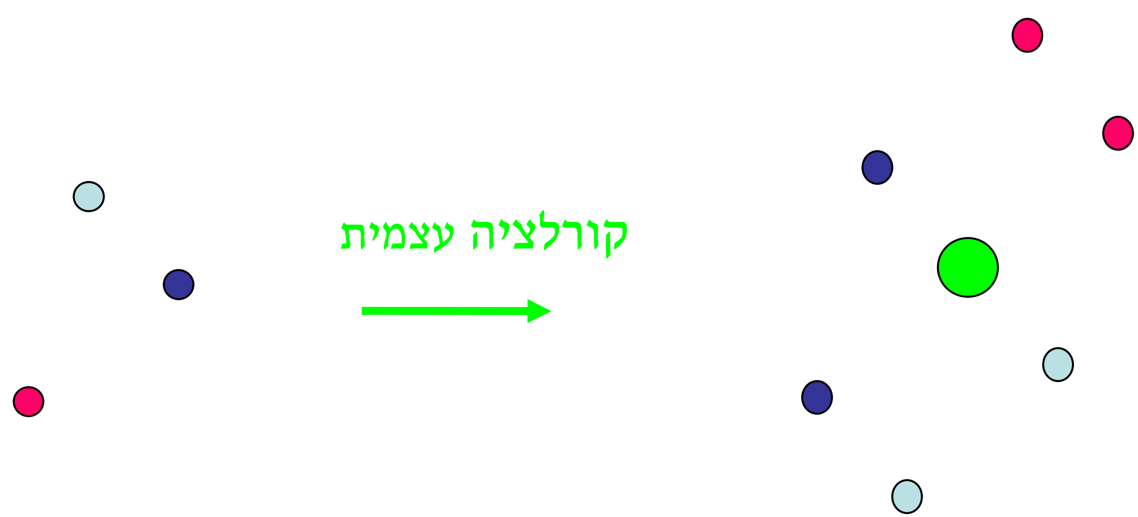
$$H_{AC}\left(k\right)=\left|F\left(k\right)\right|^2$$

משפט וינר-חינצ'ין

- אם הפונקציה ממשית, אזי התמרת הקורלציה העצמית שלה היא $H_{AC}(k)=|F(k)|^2$.
- לפונקציה זו קוראים גם ספקטרום העוצמה (power spectrum) של הפונקציה.
- גם בכיוון ההפוך: ההתמרה ההפוכה של הקורלציה העצמית היא ריבוע הערך המוחלט של הפונקציה.
- זהו משפט וינר-חינצ'ין:

  ההתמרה של הקורלציה העצמית היא ספקטרום העוצמה של הפונקציה.

- קיימים יישומים רבים למשפט וינר-חינצ'ין בשנים ובשלושה מימדים.
- לדוגמה, תהי הפונקציה מורכבת ממספר פונקציות δ.
- הקורלציה העצמית היא סכום של הפונקציה *מהופכת* ביחס למרכז *ומוזזת* למיקומי פונקציות ה-δ.



משפט פרסבל

- עבור פונקציה כללית, התמרת ספקטרום העוצמה היא הקורלציה העצמית שלה $|F(-k)|^2 = H_{AC}(k)$.
- נכתוב בפירוש:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(-k\right)\right|^2 \mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(v\right) f^*\left(v+x\right)dv$$

- נציב בנוסחה $k \to -k$ וכן $x = 0$ ונקבל

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(k\right)\right|^2 \mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(v\right)\right|^2 dv$$

- אבל v הוא משתנה אינטגרציה במקום x, אז נציב במקומו x ונקבל

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(k\right)\right|^2 \mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|^2 dx$$

- זהו משפט פרסבל. במקרים רבים הוא מייצג שימור אנרגיה. למשל כאשר אור עובר עקיפת פראונהופר הוא ניתן לייצוג במרחב פוריה, אולם האנרגיה שלו אינה משתנה.